УДК 517.968 https://doi.org/10.33619/2414-2948/132/01

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

©Зулпукаров Ж. А*., ORCID: 0009-0002-9795-6369, SPIN-код: 6028-6306, канд. физ.-мат. наук, Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, zulpukarov66@mail.ru*
©Алиева Ж. А*., SPIN-код: 5253-4427, Ошский государственный педагогический университет им. А. Мырсабекова, г. Ош Кыргызстан, ilimbek9471@mail.ru*
©Алишерова Ф. У*., Ошский технологический университет им. М. М. Адышева, г. Ош, Кыргызстан, f.alisherova@mail.ru*

REGULARIZATION AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS FOR A SYSTEM OF FIRST-KIND LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES

©Zulpukarov Zh*., ORCID: 0009-0002-9795-6369, SPIN-code: 6028-6306, Ph.D., Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan, zulpukarov66@mail.ru*
©Alieva Zh*., SPIN-code: 5253-4427, Osh State Pedagogical University named after A. Mursabekov, Osh, Kyrgyzstan, ilimbek9471@mail.ru*
©Alisherova F*., Osh Technological University named after M. Adyshev, Osh, Kyrgyzstan f.alisherova@mail.ru*

Аннотация. Настоящее исследование посвящено вопросам регуляризации и единственности решений системы линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Интегральные уравнения данного типа занимают важное место в современной прикладной математике, поскольку широко используются при моделировании процессов теплообмена, фильтрации, распространения волн, управления динамическими системами, а также в задачах математической физики и инженерных наук. Особенность интегральных уравнений первого рода заключается в том, что они относятся к классу некорректно поставленных задач, для которых характерны неустойчивость решений и высокая чувствительность к погрешностям исходных данных. В работе рассматриваются условия существования и единственности решений исследуемой системы интегральных уравнений. Выполняется анализ свойств интегральных операторов и ядер уравнений, определяются требования, обеспечивающие корректность решения задачи. Особое внимание уделяется методам регуляризации, направленным на устранение неустойчивости и получение надежных приближенных решений. Исследуются различные подходы к построению регуляризирующих алгоритмов, позволяющих восстанавливать искомые функции даже при наличии ошибок измерений и неполноты исходной информации. Для достижения поставленных целей используются методы функционального анализа, теории интегральных уравнений и численного моделирования. Получены достаточные условия, гарантирующие единственность решения системы линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Применение методов регуляризации обеспечивает устойчивость решения относительно возмущений исходных данных и способствует повышению точности вычислительных результатов. Практическая значимость исследования

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 12. №11 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132

заключается в возможности использования полученных результатов при разработке эффективных численных методов решения многомерных интегральных уравнений и задач восстановления неизвестных параметров по косвенным наблюдениям. Результаты работы могут найти применение в различных областях науки и техники, где требуется исследование сложных процессов, описываемых интегральными моделями.

Abstract. This study is devoted to the regularization and uniqueness of solutions of a system of linear Volterra integral equations of the first kind with two independent variables. Integral equations of this type play an important role in modern applied mathematics, as they are widely used in modeling heat transfer processes, filtration phenomena, wave propagation, control of dynamic systems, as well as in various problems of mathematical physics and engineering sciences. A distinctive feature of first-kind integral equations is that they belong to the class of ill-posed problems, which are characterized by instability of solutions and high sensitivity to errors in the initial data. The paper examines the conditions for the existence and uniqueness of solutions to the considered system of integral equations. An analysis of the properties of integral operators and kernels is carried out, and the requirements ensuring the correctness of the problem formulation are determined. Special attention is paid to regularization methods aimed at eliminating instability and obtaining reliable approximate solutions. Various approaches to constructing regularization algorithms are investigated, making it possible to recover unknown functions even in the presence of measurement errors and incomplete input information. To achieve the objectives of the study, methods of functional analysis, the theory of integral equations, and numerical modeling are employed. Sufficient conditions guaranteeing the uniqueness of solutions of the system of linear Volterra integral equations of the first kind with two independent variables are obtained. It is shown that the application of regularization methods ensures the stability of solutions with respect to perturbations in the input data and contributes to improving the accuracy of computational results. The practical significance of the research lies in the possibility of applying the obtained results to the development of efficient numerical methods for solving multidimensional integral equations and inverse problems involving the reconstruction of unknown parameters from indirect observations. The results can be used in various fields of science and technology where complex processes described by integral models are studied.

Ключевые слова: функция, резольвента, ядро, функциональное пространство, интегральные уравнения, параметр, лемма, теорема.

Keywords: function, resolvent, kernel, function space, integral equations, parameter, lemma, theorem.

Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными часто возникают при моделировании различных процессов математической физики и прикладных задач [1-6].

Такие системы, как правило, относятся к некорректно поставленным задачам, что приводит к трудностям при их аналитическом и численном решении. В связи с этим особое значение приобретают вопросы регуляризации, позволяющие стабилизировать решение при наличии погрешностей исходных данных. В данной работе рассматриваются условия единственности решений и методы их регуляризации для линейной системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода [3, 4].

Рассматривается система:

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 12. №11 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132

$$\int_0^t K(t,x,s)u(s,x)ds + \int_0^t \int_0^x N(t,x,s,z)u(s,z)dzds = f(t,x),\ (t,x)\in G, \quad (1)$$

где $K(t,x,s)$ и $N(t,x,s,z)$ – (nxn) – матрицы функции, а $u(t,x)$ – неизвестная и $f(t,x)$– известная заданная n – мерные вектор-функции на $G=\{(t,x): 0\le t\le T, 0\le x\le X\}$, f(0,x)=0 при $x\in[0,X]$. Введем норму, для nxn – матрицы A=(aij) следующим образом: $\|A\| = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$ и для n–мерных векторов $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ в виде $\|u\| = (\sum_{i=1}^n u_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Допускается, что $\det[K(t,x,t)]$ может обращаться в нуль счетное число в области G. Пусть λi(t,x), (i=1,2,…,n) – собственные значения матрицы $\frac{1}{2}[K(t,x,t)+K^*(t,x,t)]$, где $K^*(t,x,t)$– сопряженная матрица к матрице $K(t,x,t)$. Обозначим:

$$\lambda(t,x) = \min_i\{\lambda_i(t,x)\},\ (t,x)\in G,\ i=1,2,\dots,n. \quad (2)$$

Потребуем выполнение следующих условий:

а) $\|K(t,x,s)\|\in C(G_1)$, $\|N(t,x,s,z)\|\in C(G_2)$, $\|K(t,x,t)\|\le N_0\lambda_0(t)$ и $\lambda(t,x)\ge\lambda_0(t)\ge 0$, 0<N0-const, λ(t,x) – определена с помощью формулы (2), $\lambda_0(t)\in L_1(,T)$;

б) при t>τ для любых (t,x,s),(τ,x,s)∈G1={(t,x,s): 0≤s≤t≤T; 0≤x≤X} справедливо $\|K(t,x,t)-K(\tau,x,s)\|\le C\int_\tau^t \lambda_0(s)ds$, где 0<C – некоторый положительный скаляр;

в) при t>τ для любых (t,x,s,z),(τ,x,s,z)∈G2={(t,x,s,z): 0≤ s≤ t ≤T; 0≤ z≤x ≤X} справедливо $\|N(t,x,s,s)-N(\tau,x,s,z)\|\le C_1\int_\tau^t \lambda_0(s)ds$, где 0<C1 – некоторая постоянная и N(t,x,t,z)≡0 при (t,x,z)∈G4={(t,x,z): 0≤ t≤T; 0≤ z≤ x≤X}. Наряду с системой (1) рассмотрим систему:

$$\varepsilon u(t,x,\varepsilon) + \int_0^t K(t,x,s)u(s,x,\varepsilon)ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)u(s,z,\varepsilon)dzds = f(t,x), \quad (3)$$

где 0<ε – малый параметр. Решение системы (3) будем искать в виде:

$$u(t,x,\varepsilon)=u(t,x)+\xi(t,x,\varepsilon),\ (t,x)\in G. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), имеем:

$$\varepsilon\xi(t,x,\varepsilon) + \int_0^t K(t,x,s)\xi(s,x,\varepsilon)ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\xi(s,z,\varepsilon)dzds + \varepsilon u(t,x) = 0. \quad (5)$$

Преобразуем последнюю систему уравнений следующим образом:

$$\xi(t,x,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t,x,s)\xi(s,x,\varepsilon)ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [K(t,x,s)-K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\xi(s,z,\varepsilon)dzds - u(t,x),\ (t,x)\in G. \quad (6)$$

Резольвента матричного ядра $\left(-\frac{K(s,x,s)}{\varepsilon}\right)$ имеет вид:

$$R(t,x,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,t,\varepsilon)K(s,x,s),\ \varepsilon>0, \quad (7)$$

где X(t,x,s,ε) – матричная функция Коши системы $\varepsilon X_t'(t,x.s) = -K(t,x,t)X(t,x,s,\varepsilon)$, $X(t,x,s,\varepsilon)=E_n$, En -единичная матрица. Матричная функция X(t,x,s,ε) обладает следующими свойствами:

$$X(t,x,s,\varepsilon) = X(t,x,\varepsilon)X^{-1}(s,x,\varepsilon), \quad (8)$$

где X-1(t,x,ε) – обратная матрица матрицы X(t,x,ε).

$$[X_t'(t,x.s,\varepsilon)]_s' = \frac{1}{\varepsilon}X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s), \quad (9)$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 12. №11 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132

$$[X_t'(t,x.s,\varepsilon)]_\tau' = -\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,t)X(t,x,s,\varepsilon)\ . \tag{10}$$

На основании неравенства Важевского [1] и условия а) имеем:

$$\|X(t,x,s,\varepsilon)\| \le \sqrt{n}exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_0(\tau)d\tau\right\},\ (t,x,s)\in G1, \tag{11}$$

Далее, с помощью резольвенты R(t,x,s,ε), из (7) имеем:

$$\xi(t,x,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [K(t,x,s) - K(s,x,s)]\xi(s,x,\varepsilon)ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^s X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)\times$$
$$[K(t,x,\tau) - K(\tau,x,\tau)]\xi(\tau,x,\varepsilon)d\tau ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,s,z)\xi(s,z,\varepsilon)dzds +$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^s\int_0^x X(t,x,s,\varepsilon)K(s,z,s)N(s,x,\tau,z)\xi(\tau,z,\varepsilon)dzd\tau ds - u(t,x) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t X(t,x,s,\varepsilon)K(s,z,s)\xi(\tau,z,\varepsilon)ds\ .$$

Используя формулу Дирихле и учитывая (9), (10), последнее преобразуем к следующему виду:

$$\xi(t,x,\varepsilon) = \int_0^t H(t,x,s,\varepsilon)\xi(s,x,\varepsilon)ds + \int_0^t\int_0^x N_1(t,x,s,z,\varepsilon)\xi(s,x,\varepsilon)dzds + F(t,x,\varepsilon)\ , \tag{12}$$

где:

$$H(t,x,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,s,\varepsilon)[K[t,x,s) - K(s,x,s)] - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t X(t,x,\tau,\varepsilon)K(s,x,s) \tag{13}$$
$$\times [K(t,x,\tau) - K(\tau,x,s)]d\tau,\ (t,x)\in G,$$

$$N_1(t,x,s,z,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,s,\varepsilon)N(t,x,s,z) - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,\tau,\varepsilon)K(\tau,x,\tau) \tag{14}$$
$$\times [N(t,x,s,z) - N(\tau,x,s,z)]d\tau,\ (t,x)\in G,$$

$$F(t,x,\varepsilon) = -X(t,x,0,\varepsilon)u(t,x) - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)[u(t,x) - u(s,x)]ds\ . \tag{15}$$

В дальнейшем используем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия а), б) и в). Матричные функции H(t,x,s,ε) и N1(t,x,s,z,ε) определяются соответственно с помощью формул (13) и (14). Тогда справедлива следующая оценка:

$$\|H(t,x,s,\varepsilon)\| \le C_3,\ (t,x,s)\in G_1,\ \varepsilon > 0, \tag{16}$$

$$\|N_1(t,x,s,z,\varepsilon)\| \le C_4,\ (t,x,z,s)\in G_4,\ \varepsilon > 0, \tag{17}$$

где $C_3 = C\sqrt{n}(e^{-1} + N_0),\ C_4 = C_1\sqrt{n}(e^{-1} + N_0),\ N_0 > 0$.

Доказательство. В силу условий а) – б) из (13) имеем:

$$\|H(t,x,s,\varepsilon)\| \le \frac{1}{\varepsilon}\|X(t,x,s)\|C\int_s^t \lambda_0(s)ds + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t\|X(t,x,\tau,\varepsilon)\|N_0\lambda_0(\tau)C\left(\int_s^t\lambda_0(s)ds\right)d\tau\ .$$

В этом случае, в силу (11) для первого слагаемого имеем:

$$\frac{1}{\varepsilon}\|X(t,x,s)\|C\int_s^t\lambda_0(s)ds = \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_0(\tau)d\tau}C\int_s^t\lambda_0(s)ds = \left|\eta = \int_s^t\lambda_0(\tau)d\tau\right| =$$
$$C\sqrt{n}\eta e^{-\eta} \le C\sqrt{n}e^{-1}.$$

Для второго слагаемого справедливо соотношение:

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t\|X(t,x,\tau,\varepsilon)\|N_0\lambda_0(\tau)C\left(\int_s^t\lambda_0(s)ds\right)d\tau = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t\sqrt{n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\lambda_0(\tau)d\tau}N_0\lambda_0(\tau)C\left(\int_s^t\lambda_0(s)ds\right)d\tau$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

$$= \left| \begin{matrix} \eta = \int_s^t \lambda_0(\tau)d\tau \\ d\eta = -\frac{1}{\varepsilon}\lambda_0(\tau)d\tau \end{matrix} \right| = CN_0\sqrt{n}(-1)\eta e^{-\eta}\int_{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_0(\tau)d\tau}^{0} \eta e^{-\eta}d\eta \le CN_0\sqrt{n}\int_0^{\infty} \eta e^{-\eta}d\eta \le$$

$$CN_0\sqrt{n}.$$

Следовательно, отсюда вытекает справедливость леммы 1. Аналогично этому можно получить оценки (17).

Лемма 2. Пусть функция F(t,x,ε) определена формулой (15). Если u(t,x)∈Cn(G); $u(0,x) = 0$ при $x \in [0,X]$ и $\lambda_0(t) > 0$ при почти всех $t \in [0,T]$, $\varphi(t) = \int_0^t \lambda_0(s)ds$, $t \in [0,T]$, $\|K(t,x,t)\| \le N_0\lambda_0(t)$ при всех $(t,x) \in G$; λ(t,x)∈C(G), N0>0 , то справедлива оценка:

$$\|F(t,x,\varepsilon)\| \le (2N_0+1)e^{-\frac{1}{1-\beta}}\sqrt{n}\|u(t,x)\|_C + (N_0+1)\omega_u(\varepsilon^\beta)\sqrt{n}, \tag{18}$$

где β – некоторые число из интервала (0,1), $\omega_u(\varepsilon^\beta) = \sup\limits_{\substack{|v-v_0|<\delta \\ x\in[0,X]}} \|u(\varphi^{-1}(v),x) - u(\varphi^{-1}(v_0)\|, \varphi^{-1}(v)$ – обратная функция к функции $v = \varphi(t) = \int_0^t \lambda_0(s)ds$, т.е. $v = \varphi^{-1}\big(\varphi(t)\big) = t,\ \varphi^{-1}\big(\varphi(v)\big) = v.$

Доказательство. 1) Пусть $0 \le t \le \varphi^{-1}(\varepsilon^\beta), 0 < \beta < 1$. Тогда из (15) имеем:

$$\|F(t,x,\varepsilon)\| = \left\| -X(t,x,0,\varepsilon)u(t,x) - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t X\,(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)[u(t,x) - u(s,x)]ds \right\| \le \omega_u(\varepsilon^\beta)\sqrt{n}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(t)} + \omega_u(\varepsilon^\beta)\int_0^t \frac{\sqrt{n}}{\varepsilon}N_0 e^{-\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(t)-\varphi(s)]}\lambda_0(s)ds \le$$

$$\omega_u(\varepsilon^\beta)N_0 \le (1+N_0)\sqrt{n}\omega_u(\varepsilon^\beta)\ . \tag{19}$$

2) Если φ -1(εβ)≤ t≤ T, то:

$$\|X(t,x,s,\varepsilon)u(t,x)\| \le \|u(t,x)\|_C\sqrt{n}e^{-\frac{1}{1-\beta}}, \tag{20}$$

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^\beta)} X\,(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)[u(t,x)-u(s,x)]ds \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varphi^{-1}(\varphi(t)-\varepsilon^\beta)}^{t} X\,(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)\times[u(t,x)-u(s,x)]ds \right\| \le$$

$$2N_0\|u(t,x)\|_C\sqrt{n}e^{-\frac{1}{1-\beta}}\sqrt{n} + N_0\omega_u(\varepsilon^\beta)\sqrt{n}. \tag{21}$$

Учитывая (19), (20) и (21), из (15) получаем оценку (18). Лемма 2 доказана.

В силу оценок (16), (17) и (18) из (12) получим:

$$\|\xi(t,x,\varepsilon)\| \le a(t,x,\varepsilon) + \int_0^t C_3\|\xi(s,x,\varepsilon)\|ds, \text{ (t,x)}\in G, \tag{22}$$

где

$$a(t,x,\varepsilon) = C_0(\varepsilon) + \int_0^t\int_0^x C_4\|\xi(s,z,\varepsilon)\|dzds. \tag{23}$$

$C_0(\varepsilon) = (2N_0+1)\sqrt{n}e^{-\frac{1}{1-\beta}}\|u(t,x)\|_C + (N_0+1)\omega_u(\varepsilon^\beta)\sqrt{n}.$

На основе леммы [2] неравенство (22) перепишем в следующем виде:

$\|\xi(t,x,\varepsilon)\| \le a(t,x,\varepsilon) + \int_0^t C_3\, e^{C_3(t-s)}a(s,x,\varepsilon)ds$.

Вместо $a(t,x,\varepsilon)$ положим выражение (23) и из последнего неравенства имеем:

$$\|\xi(t,x,\varepsilon)\| \le C_0(\varepsilon) + \int_0^t\int_0^x C_4\|\xi(s,z,\varepsilon)\|dzds + \int_0^t C_3\, e^{C_3(t-s)}\{C_0(\varepsilon) + \int_0^s\int_0^x C_4\|\xi(s_1,z,\varepsilon)\|dzds_1\}ds\ .$$

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 12. №11 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132

Это неравенство интегрируем и применим формулу Дирихле: $\|\xi(t,x,\varepsilon)\| \le C_0(\varepsilon)e^{C_3 t} + \int_0^t \int_0^x C_4\, e^{C_3(t-s)}\|\xi(s,z,\varepsilon)\|dzds$, затем заменив t на T пишем и отсюда применив формулу Дирихле, получим:

$$\|\xi(t,x,\varepsilon)\| \le C_6 + \int_0^t \int_0^x C_7\, R(t,x,s,z)dzds. \tag{24}$$

где $R(t,x,s,z) = \sum_{n=0}^{\infty}(C_4 e^{C_3 T})^{n+1}\frac{(t-s)^n(x-z)^n}{(n!)^2}$, $C_6 = C_0(\varepsilon)e^{C_3 T}[1 + R(T,X,0,0)TX]$,

$$C_6 = C_5 e^{C_3 T}[1 + R(T,X,0,0)TX].$$

Из (24) имеем:

$$\|\xi(t,x,\varepsilon)\| \le C_8 C_0(\varepsilon),\ (t,x)\in G, \tag{25}$$

где $C_0(\varepsilon) = (2N_0+1)\sqrt{n}e^{-\frac{1}{1-\beta}}\|u(t,x)\|_C + (N_0+1)\omega_u(\varepsilon^\beta)\sqrt{n}$ $C_8 = e^{C_3 T}[1 + R(T,X,0,0)TX]$.

Таким образом, доказана следующая.

Теорема 1. Пусть выполнены условия а), б), в) и пусть система (1) имеет непрерывное решение $u(t,x) \in C_n(G)$ при $x \in [0,X]$, удовлетворяющее условию $u(0,x) = 0$, причем $\lambda_0(t) > 0$ почти для всех $t \in [0,T]$. Тогда решение $u(t,x,\varepsilon)$ системы (3) при $\varepsilon \to 0$ сходится к непрерывному решению $u(t,x)$ системы (1) в области G, и имеет место оценка (25).

Лемма 3. Пусть:

$$F(t,x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}f(t,x) - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t X(t,x,s,\varepsilon)K(s,x,s)f(s,x)ds, \tag{26}$$

где X(t,x,s,ε) – матричная функция Коши системы $\varepsilon X_t'(t,x.s) = -\frac{1}{\varepsilon}K(t,x,t)X(t,x,s,\varepsilon)$, $X(t,x,s,\varepsilon) = E_n$, En -единичная матрица. Кроме того, пусть $\lambda(t,x) \ge \lambda_0(t) > 0$, при почти всех $t \in [0,T]$, $\lambda_0(t) \in L_1(0,T)$ и $\|K(t,x,t)\| \le N_0\lambda_0(t)$ при всех (t,x)∈G, N0>0, то в области G справедлива оценка:

$$\|F_1(t,x,\varepsilon)\|_C = \frac{\|f(t,x)\|}{\varepsilon}\left(1 + \sqrt{n}N_0\right)., \tag{27}$$

Доказательство. Учитывая (11) из (26) имеем:

$\|F_1(t,x,\varepsilon)\|_C = \frac{\|f(t,x)\|_C}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\sqrt{n}N_0\|f(t,x)\|_C\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_0(\tau)d\tau}\lambda_0(s)ds \le (1+\sqrt{n}N_0)\cdot \frac{\|f(t,x)\|_C}{\varepsilon}$.

Лемма 3 доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия а), б), в) и $\lambda_0(t) > 0$ при почти всех $t \in [0,T]$. Тогда решение системы (1) единственно в пространстве Cn(G).

Доказательство. Пусть однородная система: $\int_0^t K(t,x,s)v(s,x)ds + \int_0^t \int_0^x N(t,x,s,z)v(s,z)dzds = 0$, (t,x)∈G, т.е. система (1) при $f(t,x) \equiv 0$ допускает ненулевое решение $v(t,x)$ при (t,x)∈G. Последнюю систему перепишем в следующем виде:

$$\int_0^t K(t,x,s)v(0,x)ds + \int_0^t K(t,x,s)[v(s,x) - v(0,x)]ds + \int_0^t [K(t,x,s) - K(s,x,s]v(s,x)ds + \int_0^t \int_0^x [N(t,x,s,z) - N(s,x,s,z)]v(s,z)dzds = 0. \tag{28}$$

Обе части системы (28) скалярно умножим на вектор $v(0,x)$. Скалярное произведение обозначим символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Умножим справа, имеем

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

Т. 12. №11 2026
https://doi.org/10.33619/2414-2948/132

$$\langle\int_0^t K\,(t,x,s)v(s,x)ds, v(0,x)\rangle + \langle\int_0^t K\,(t,x,s)[v(s,x)-v(0,x)]ds, v(0,x)\rangle + \langle\int_0^t[K\,(t,x,s)-K(s,x,s]v(s,x)ds, v(0,x)\rangle + \langle\int_0^t\int_0^x[N\,(t,x,s,z)- N(s,x,s,z)]v(s,z)dzds, v(0,x)\rangle = 0. \quad (29)$$

Теперь умножим слева:

$$\langle v(0,x), \int_0^t K\,(t,x,s)ds\rangle + \langle\int_0^t K\,(t,x,s)[v(s,x)-v(0,x)]ds, v(0,x)\rangle + \langle v(0,x), \int_0^t[K\,(t,x,s)-K(s,x,s]v(s,x)ds\rangle + \langle v(0,x), \int_0^t\int_0^x[N\,(t,x,s,z)- N(s,x,s,z)]v(s,z)dzds\rangle = 0, \text{ (t,x)}\in G. \quad (30)$$

Складывая почленно (29) и (30), получаем:

$$\langle\int_0^t[K\,(s,x,s)+K^*(s,x,s)dsv(0,x), v(0,x)\rangle + \langle\int_0^t[K\,(t,x,s)[v(s,x)-v(0,x)]ds, v(0,x)\rangle + \langle\int_0^t[K\,(t,x,s)-K(s,x,s]v(s,x)ds, v(0,x)\rangle + \langle v(0,x), \int_0^t\int_0^x[N\,(t,x,s,z)- N(s,x,s,z)]v(s,z)dzds\rangle = 0.$$

В силу свойства скалярного произведения, получаем $\int_0^t\lambda_0\,(s)ds\|v(0,x)\| \le 2N_0\int_0^t\lambda_0\,(s)ds \sup_{(s,x)\in G_t}\|v(s,x)+v(0,x)\|\,ds + 2\int_0^t\|K\,(t,x,s)+K^*(s,x,s)\|\|v(s,x)\|ds + 2\int_0^t\int_0^x\|N\,(t,x,s,z)+N(s,x,s,z)\|\|v(s,z)\|dzds$, где Gt={(t,x,s): 0≤ s≤ t; 0≤x ≤X}.

Отсюда силу условий теоремы, имеем $\int_0^t\lambda_0\,(s)ds\|v(0,x)\| \le 2N_0\int_0^t\lambda_0\,(s)ds \sup_{(s,x)\in G_t}\|v(s,x)+v(0,x)\|\,ds + 2C\int_0^t\int_s^t\lambda_0\,(\tau)d\tau\cdot\|v(s,z)\|d\tau ds + 2C_1\int_0^t\int_0^x\int_s^t\lambda_0\,(\tau)\|v(s,z)\|d\tau dzds$.

Далее, применяем формулу Дирихле и теорему о среднем и деля обе части полученного на $\int_0^t\lambda_0\,(s)ds$ получаем $\|v(0,x)\| \le 2N_0 \sup_{(s,x)\in G_t}\|v(s,x)+v(0,x)\| + [2Ct+2C_1tx]\|v(t,x)\|$.

Отсюда переходя, к пределу при t→0 получим

$$v(t,x) = 0 \text{ при } x\in[0,X]. \quad (31)$$

Из (3) при $f(t,x)=0$, (t,x)∈G, имеем $u(t,x,\varepsilon)=0$ при всех (t,x)∈G, ε>0. Тогда в силу теоремы 1 имеем $\|v(t,x)\| = \|u(t,x,\varepsilon)+u(t,x)\|_C \le [(2N_0+1)e^{-\frac{1}{1-\beta}} + (N_0+1)\omega_u(\varepsilon^\beta)]\sqrt{n}e^{C_2T} \to 0$, при $\varepsilon\to 0$. Таким образом $\|v(0,x)\|_C = 0$/ Отсюда $u(t,x)=0$ при всех (t,x)∈G. Теорема 2 доказана.

Заключение

В данной работе рассмотрены задачи регуляризации и единственности решений системы линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными. Получены условия, обеспечивающие существование и единственность решения исследуемой системы. Предложенный подход к регуляризации позволяет стабилизировать решение при малых возмущениях входных данных. Установленные результаты могут быть применены при исследовании некорректно поставленных задач математической физики и прикладной математики.

Список литературы:

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 286 с.

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)

2. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.

3. Гренандер У. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Мир, 1971. 240 с.

4. Михлин С. Г. Линейные интегральные уравнения. М., 1957. 232 с.

5. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.

6. Бекешов Т. О. Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Бишкек, 1998. 16 с.

7. Каракеев Т. Т., Мустафаева Н. Т. Регуляризация линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными // Известия ВУЗов Кыргызстана. 2017. №9. С. 10-16.

References:

1. Tikhonov, A. N., & Arsenin, V. Ya. (1986). Metody resheniya nekorrektnykh zadach. Moscow. (in Russian).

2. Lavrent'ev, M. M., Romanov, V. G., & Shishatskii, S. P. (1980). Nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza. Moscow. (in Russian).

3. Grenander, U. (1971). Lektsii po teorii integral'nykh uravnenii. Moscow. (in Russian).

4. Mikhlin, S. G. (1957). Lineinye integral'nye uravneniya. Moscow. (in Russian).

5. Vol'terra, V. (1982). Teoriya funktsionalov, integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravnenii. Moscow. (in Russian).

6. Bekeshov, T. O. (1998). Regulyarizatsiya i edinstvennost' reshenii integral'nykh uravnenii Vol'terra pervogo roda s dvumya nezavisimymi peremennymi: avtoref. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Bishkek. (in Russian).

7. Karakeev, T. T., & Mustafaeva, N. T. (2017). Regulyarizatsiya lineinykh integral'nykh uravnenii Vol'terra pervogo roda s dvumya nezavisimymi peremennymi. *Izvestiya VUZov Kyrgyzstana,* (9), 10-16. (in Russian).

Поступила в редакцию
14.09.2026 г.

Принята к публикации
21.09.2026 г.

Ссылка для цитирования:

Зулпукаров Ж. А., Алиева Ж. А., Алишерова Ф. У. О регуляризации и единственности решений системы линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными // Бюллетень науки и практики. 2026. Т. 12. №11. С. 14-21. https://doi.org/10.33619/2414-2948/132/01

Cite as (APA):

Zulpukarov, Zh., Alieva, Zh., & Alisherova, F. (2026). Regularization and Uniqueness of Solutions for a System of First-Kind Linear Volterra Integral Equations with Two Independent Variables. *Bulletin of Science and Practice, 12*(11), 14-21. (in Russian). https://doi.org/10.33619/2414-2948/132/01

Тип лицензии CC: Attribution 4.0 International (CC BY 4.0)